

基于小波变换的3维网格水印

谢守江 张鸿宾 刘波

(北京工业大学计算机学院, 北京 100022)

摘要 3维网格数据是不规则采样的数据集,传统的图像变换域水印算法不能直接应用到网格上。提出了一种小波变换域的鲁棒网格水印算法。该算法对半规则的多分辨率网格进行小波变换,得到一个基网格和一系列小波系数。在对小波系数的统计特性进行实验分析的基础上,选择在低频子带的小波系数中嵌入水印,并对小波系数的切向和法向分量设计了不同的嵌入强度,以减小几何失真。实验结果表明,该水印算法满足不可见性,并具有较强的鲁棒性。

关键词 网格水印 多分辨率表示 小波变换 网格细分

中图分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2006)10-1387-08

Robust Mesh Watermarking Using Wavelet Transform

XIE Shou-jiang, ZHANG Hong-bin, LIU Bo

(Computer Institute, Beijing University of Technology, Beijing 100022)

Abstract Traditional watermarking methods in the transformed domain for images can't be applied on meshes directly because meshes are generally irregular sampled data sets. This paper proposes a robust mesh watermarking algorithm using wavelet transform for semi-regular meshes obtained by remeshing. The original mesh with multiresolution representation is decomposed into a base mesh and a set of wavelet coefficient vectors by applying the wavelet transform. Based on the statistical analysis of wavelet coefficients, the watermarks are embedded by perturbing the wavelet coefficient vectors in low resolution subband, and the embedding strengths for different components of the wavelet coefficient vectors are designed differently in order to decrease the geometric distortion. Experimental results show that this algorithm satisfies imperceptibility and is robust to various attacks.

Keywords mesh watermarking, multiresolution representation, wavelet transformation, mesh subdivision

1 引言

近年来,数字水印技术的研究取得了很大的进展。但是大多数的水印算法都是针对文本、图像、视频和音频等数字媒体的,对3维几何模型的数字水印的研究还较少。目前,数字化的3维物体越来越普及并且在互联网上传播,3维几何模型的数字水印的研究已成为数字水印研究中的一个重要课题。3维几何模型一般用多边形网格来表示,3维几何模型的数字水印一般是把多边形网格作为水印的嵌入

对象。这里将这种水印称为网格水印。

和图像水印一样,网格水印也可以分为空域水印和变换域水印两种。空域水印直接对宿主数据进行修改,计算简单,效率较高,但鲁棒性较差。Ohbuchi提出了一系列空域网格水印算法,如TSQ(triangle similarity quadruple)、TVR(tetrahedral volume ratio)、TSPS(triangle strip peeling symbol sequence)、MDP(mesh density pattern)算法等^[1]。Benedens也提出了一些空域水印算法,如基于法向调整的算法、顶点束算法、三角形束算法等,并开发了GEOMARK系统^[2]。最近的文献[3]提出的也是

基金项目:国家自然科学基金项目(60075002,60275001);国家863计划(2003AA144080);教育部博士点基金(20040005016)

收稿日期:2004-12-02;改回日期:2005-09-12

第一作者简介:谢守江(1980~),男,2004年北京工业大学硕士研究生毕业。研究方向为模式识别与图像处理、计算机图形学。

E-mail: gonutting@gmail.com

一种空域水印算法,它将水印嵌在了网格顶点和模型中心的连接向量中。

变换域水印通过对宿主数据进行一定的变换后再嵌入水印,计算复杂,但鲁棒性较强。Kanai^[4]基于 Lounsbury^[5]提出的网格多分辨率分析的思想,第 1 次提出了变换域的网格水印算法。Praun^[6]基于 Hoppe^[7]提出的渐进网格表示,选择一系列在点分裂操作中引起最大几何变化的点,对这些网格顶点构造一组标量基函数,然后以基函数为权值对网格顶点坐标进行轻微扰动以嵌入水印。Yin^[8]基于 Guskov^[9]的网格多分辨率处理的思想,对原始网格构造一个 Burt-Adelson 金字塔结构,并选择适当层次的粗糙网格嵌入水印。Ohbuchi^[10]基于 Karni 和 Gotsman^[11]提出的网格频谱分析的思想,通过修改谱系数嵌入水印。

网格水印的难点在于,网格数据是不规则采样的数据集,缺乏进行频谱分解的自然方法,所以传统变换域的图像水印算法不能简单地推广到网格水印中,需要寻找新的针对网格数据的变换方法。网格水印的另一困难是,目前还缺乏 3 维几何失真的感知模型。本文基于网格小波变换,提出了一种小波域中的网格水印算法,并用实验的方法分析了小波系数不同分量的统计特性。

2 网格小波变换及小波系数的统计分析

2.1 网格小波变换

小波分析的基本思想是把一个复杂的函数分解为一个较简单的函数和一系列的细节信息,形成原始信号的多分辨率表示。一般来讲,信号的低频成分比较重要,它包含信号的基本特征,而高频成分则表示信号的细节。设计水印算法时,为了提高鲁棒性,通常把水印嵌入在原始信号的中低频部分。

传统的第 1 代小波通过对某一特定的母小波进行伸缩、平移得到一族小波基函数,使得原始信号可以用小波基函数的加权和来表示或逼近。但是,第 1 代小波通常定义在规则数据上,而网格数据是流形的不规则采样数据集,在流形上函数的平移和伸缩没有定义,所以其小波变换不能通过母小波的伸缩和平移来实现。Sweldens 提出了一种应用范围更广、计算速度更快的新一类小波的构造方法^[12],这

就是基于提升方法的第 2 代小波,可用于建立流形上的小波分析。

提升的基本思想是,从一个简单的多分辨率分析,构造一个具有一定特性的多分辨率分析。用提升方法构造小波变换的过程可分为分裂、预测和更新 3 个步骤。分裂过程通常是对原始数据进行奇偶采样,将其分成偶数样本 $x_e[n] = x[2n]$ 和奇数样本 $x_o[n] = x[2n+1]$ 两部分;预测过程用 $x_e[n]$ 预测 $x_o[n]$,预测差值即小波系数 $d[n] = x_o[n] - P(x_e[n])$, P 是预测算子, $d[n]$ 是原始数据的细节成分,具有很低的能量分布;更新过程是为了保持原始数据的某些全局性质不变,对 $x_e[n]$ 进行更新,更新后的值 $c[n] = x_e[n] + U(d[n])$,即尺度系数, U 是更新算子, $c[n]$ 是原始数据的近似表示。重复以上步骤,可以将 $c[n]$ 继续分解为尺度系数和小波系数,形成不同分辨率下原始数据的近似表示和细节成分。

提升方法可以有效地实现对网格数据的小波变换,而网格细分可以作为提升过程中的预测算子。典型的网格细分方法有 Loop 细分^[13]和 Butterfly 细分^[14],相应的小波变换方法有 Loop 小波变换、非提升 Butterfly 小波变换和提升 Butterfly 小波变换^[15]等。Loop 小波变换采用 Loop 细分方法做预测,非提升 Butterfly 小波变换采用 Butterfly 细分方法做预测,没有更新过程,而提升 Butterfly 小波变换采用同样的细分方法做预测,并增加了更新过程。

2.2 小波系数的统计分析

小波变换的一个长处是可以把一个复杂的信号用一系列很小的波系数来准确地表示,它集中了能量并在很大程度上去除了原始数据之间的相关性。网格数据中相邻顶点之间有很大的相关性,小波变换把复杂的网格数据用一个基网格和一系列小波系数表示后,相对于原始网格的顶点坐标来说,小波系数的幅值要小得多。

由图 1 可以看出,绝大多数小波系数的幅值都很小,这充分说明了小波变换的能量集中和去相关性。

在对图像进行小波变换后,小波系数从低频到高频呈很好的尺度级顺序衰减,嵌入式零树小波编码就是基于图像小波系数的这种统计特性而实现的。网格进行小波变换后,小波系数也呈现和图像类似的统计特性。从低分辨率到高分辨率,网格的平滑性越来越强,小波系数也呈递减分布,其衰减的程度比图像小波系数更快。

图 2 是 Bunny 网格经提升 Butterfly 小波变换后在不同分辨率下小波系数的统计分布直方图。可以看出,随着分辨率的提高,小波系数的幅值呈递减分布,衰减速度很快,且越来越集中于零附近。

小波系数有 3 个分量,分别对应顶点坐标的 3 个分量(x, y, z)。应用局部坐标表示后,小波系数可

以用(t_1, t_2, n)来表示,其中 t_1, t_2 是切向分量, n 是法向分量。一般来讲,法向分量的幅值比切向分量要大。

图 3 表示 Bunny 网格经提升 Butterfly 小波变换后第 2 级小波系数的统计分布直方图。可以看出,切向分量的幅值更集中于零附近。

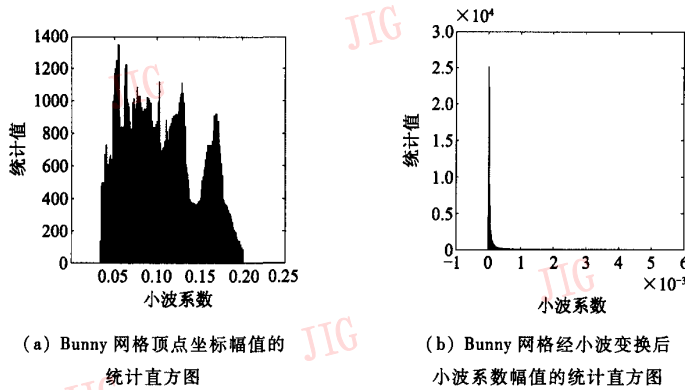


图 1 Bunny 网格顶点坐标与小波系数幅值统计直方图
Fig. 1 Statistical histograms of vertices and wavelet coefficients for Bunny meshes

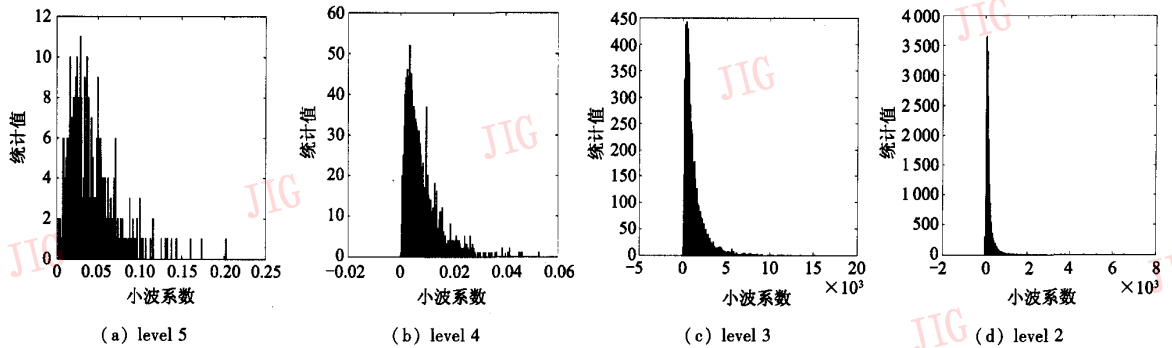


图 2 Bunny 网格在不同分辨率下小波系数的统计分布直方图
Fig. 2 Statistic histograms of wavelet coefficients in different resolutions for Bunny meshes

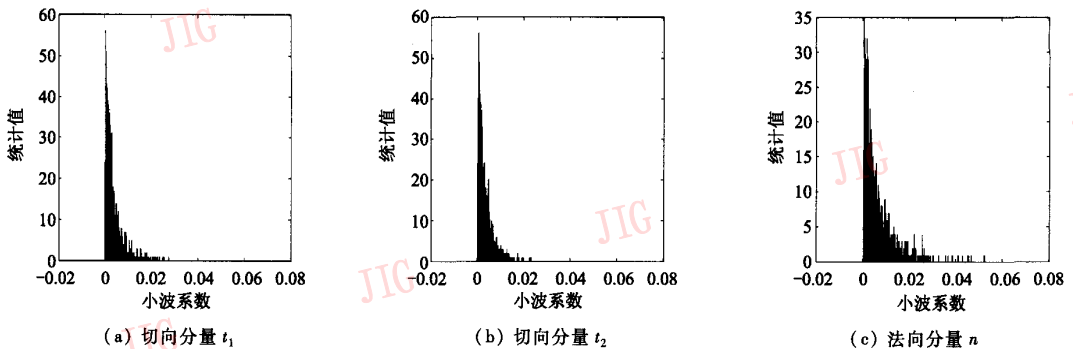


图 3 Bunny 网格第 2 级小波系数不同分量的统计分布直方图
Fig. 3 Statistic histograms of wavelet coefficient in different components for Bunny meshes

3 水印算法设计

3.1 水印嵌入算法

设原始网格为 M^0 , 水印信号 $w = (w_1, w_2, \dots, w_m), w_k \in \{0, 1\}, (k = 1, \dots, m)$ 。网格水印的嵌入算法描述如下:

(1) 将 0, 1 值的水印信号 $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ 转换成 $w' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_m)$, 其中 $w'_k \in \{-1, 1\}, (k = 1, \dots, m)$ 。转换方法如下式所示:

$$w'_k = \begin{cases} -1 & w_k = 0 \\ 1 & w_k = 1 \end{cases} \quad (1)$$

(2) 将 $w' = (w'_1, w'_2, \dots, w'_m)$ 中的每一位都复制 n 次, 得到新的水印信号序列 $w'' = (w''_1, w''_2, \dots, w''_{mn})$, 其中

$$w''_i = w'_k \quad (1 \leq k \leq m, (k-1)n + 1 \leq i \leq kn) \quad (2)$$

重复嵌入水印信号可以提高算法抵抗随机噪声攻击的鲁棒性, 但由于嵌入容量有限, 重复嵌入的次数也不能过大。

(3) 对原始网格 M^0 应用 Butterfly 小波进行小波变换, 得到原始网格的基网格 M^j 和一系列的小波系数向量 W^1, W^2, \dots, W^j , 其中 W^j 是最高分辨率的小波系数, W^1 是最低分辨率的小波系数。设某一分辨率下的小波系数为 $W^j_i = (W^j_{i,t_1}, W^j_{i,t_2}, W^j_{i,n})$, 它包括两个切向分量和一个法向分量。

(4) 设 $p_i \in \{-1, 1\}$ 是一个由密钥 k_w 产生的随机序列, 记嵌入水印后的小波系数为 $NW^i = (NW^i_{t_1}, NW^i_{t_2}, NW^i_n)$, 则水印嵌入如下式所示:

$$\begin{cases} NW^j_{i,t_1} = W^j_{i,t_1} + \alpha_t \cdot \alpha_j \cdot w''_i \cdot p_i \\ NW^j_{i,t_2} = W^j_{i,t_2} + \alpha_t \cdot \alpha_j \cdot w''_i \cdot p_i \\ NW^j_{i,n} = W^j_{i,n} + \alpha_n \cdot \alpha_j \cdot w''_i \cdot p_i \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\alpha_t \geq 0$ 是小波系数切向分量的水印强度系数, $\alpha_n \geq 0$ 是法向分量的水印强度系数, $\alpha_j \geq 0$ 是不同分辨率级的水印强度系数。水印信息嵌入后, 形成了一系列新的小波系数向量 NW^1, NW^2, \dots, NW^j 。

(5) 由基网格 M^j 和嵌入水印后的小波系数向量 NW^1, NW^2, \dots, NW^j 进行小波反变换, 得到嵌入水印后的网格 NM^0 。

水印的不可见性和鲁棒性要求通常是矛盾的。一般来讲, 把水印信息嵌入到低分辨率的基网格中有较强的鲁棒性, 但基网格的改变很容易在视觉上

表现出来, 降低了不可见性; 把水印信息嵌入到高分辨率的小波系数中, 虽然不易引起视觉上的变化, 但是由于随机噪声、网格简化等攻击可能会改变或删除细节信息, 使算法的鲁棒性降低。另外, 由于较高分辨率的小波系数一般都很小, 很难对其嵌入水印, 或者可嵌入的容量很低。本文选择在较低分辨率的小波系数中嵌入水印, 并且根据分辨率 j 的不同, 采用了不同的水印强度系数 α_j 。

另外, 对小波系数的切向分量和法向分量也采用了不同的水印强度系数 α_t 和 α_n 。一般来讲, 法向分量的改变引起的几何失真比切向分量的要大得多。为使水印满足不可见性, 应使 $\alpha_t > \alpha_n$, 甚至只修改切向分量。

3.2 水印提取算法

设原始网格为 M^0 , 嵌入水印后的网格为 NM^0 , $p_i \in \{-1, 1\}$ 是嵌入水印时由密钥 k_w 产生的随机序列, 则水印提取算法如下:

(1) 分别将 M^0 和 NM^0 进行 Butterfly 小波变换, 得到一组小波系数向量 W^1, W^2, \dots, W^j 和 NW^1, NW^2, \dots, NW^j 。

(2) 定义

$$\begin{aligned} r_k &= \sum_{l \in \{t_1, t_2, n\}} \sum_{i=(k-1)n+1}^{kn} (NW^j_{i,l} - W^j_{i,l}) p_i \\ &= \sum_{i=(k-1)n+1}^{kn} (2\alpha_t + \alpha_n) \alpha_j w''_i p_i^2 \\ &= \sum_{i=(k-1)n+1}^{kn} (2\alpha_t + \alpha_n) \alpha_j w''_i \end{aligned} \quad (4)$$

由式(4)可得: $r_k = n(2\alpha_t + \alpha_n) \alpha_j w'_k$ 。显然, r_k 和 w'_k 同号:

$$w'_k = \text{sign}(r_k) \quad (5)$$

(3) 设提取的水印信号为 $w^* = (w^*_1, w^*_2, \dots, w^*_m)$, 由式(1)可得

$$w^*_k = \begin{cases} 0 & w'_k = -1 \\ 1 & w'_k = 1 \end{cases} \quad (6)$$

嵌入水印后的网格在经历一些处理、变换或攻击后, 提取的水印信号可能与嵌入的水印信号并不完全相同。本文采用提取的水印与原始水印的相关值作为衡量标准, 判定提取的水印是否是嵌入的水印。

水印信号与原始信号的相关值为

$$\text{corr}(w^*, w) = \frac{\sum_{k=1}^m (w^*_k - E(w^*)) (w_k - E(w))}{\sqrt{\sum_{k=1}^m (w^*_k - E(w^*))^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m (w_k - E(w))^2}} \quad (7)$$

式中, w^* 和 w 分别是提取出的待判决水印和原始水印, $E(w^*)$ 是 w^* 的均值, $E(w)$ 是 w 的均值, $corr(w^*, w)$ 的取值在 $[-1, 1]$ 之间。

为了正确地判别提取的水印信号, 需要确定一个合理的相关性阈值。如果阈值太小, 会增加虚检的概率; 如果阈值太大, 则会增加漏检的概率。实验结果表明, 随机生成和原始水印信号长度相等的水印信号, 在和原始水印信号作相关性检测时, 最大相关值在 0.2 左右。为准确起见, 本算法将相关性阈值设为 0.3。如果相关值超过设定的阈值, 则可以判定网格中存在原始水印信号。

4 实验结果与攻击分析

将本文算法在 P4 2.4G 机器上用 C++ 实现。网格模型是由 Caltech 提供的 DAT^[15] 格式的半规则网格文件。实验中的水印信号是一个 50 位的随机二值序列, 即 $w_k \in \{0, 1\}, (k=1, \dots, 50)$ 。

4.1 不可见性

对 Bunny 网格进行 Butterfly 小波变换后, 生成一个基网格 M^6 和一组小波系数向量 W^1, W^2, \dots, W^5 。本实验只修改 W^5 的小波系数, 强度系数为 $\alpha_5 = 0.1$, 重复嵌入次数 $n = 5$ 。图 4(a) 是 Bunny 原始网格, 图 4(b) ~ (d) 是嵌入水印后的结果。可以看出, 图 4(b) 和 (c) 在视觉上并没有明显的失真, 而图 4(d) 中由于法向嵌入的强度系数较大, 引起的几何失真可以较明显地觉察出来。另外, 从图 4(c) 和 (d) 的比较可以看出, 在相同的强度系数下, 小波系

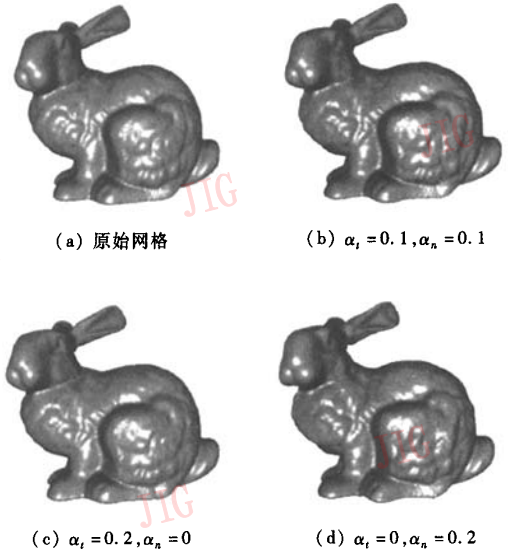


图 4 Bunny 网格水印不可见性实验
Fig. 4 Experiments of watermarking imperceptibility for Bunny meshes

数中法向分量的改变引起的几何失真比切向分量要大。所以, 一般对切向强度系数 α_t 的值设计得较大, 而法向强度系数 α_n 一般较小, 甚至为零。

对其他网格模型 Horse、Venus、Feline 和 Rabbit 的不可见性实验结果如图 5 所示 (左图为原始网格, 右图为水印网格)。水印嵌入时的参数和图 4(c) 中一样, 即 $\alpha_t = 0.2, \alpha_n = 0$ 。从实验结果中可以看出, 水印有较好的不可见性。

为了定量地度量水印嵌入后引起的几何误差,

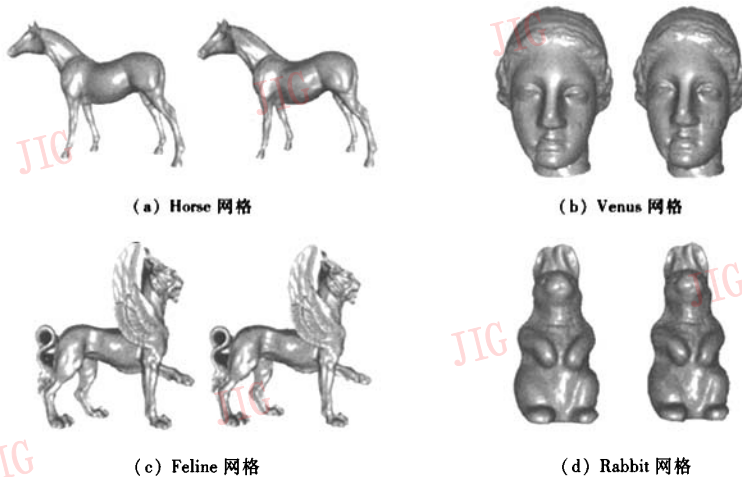


图 5 其他网格水印的不可见性实验

Fig. 5 Experiments of watermarking imperceptibility for Horse, Venus, Feline, Rabbit meshes

采用 Metro^[16] 工具计算原始网格和水印网格之间的几何失真。表 1 是 Bunny 网格在不同的水印强度下,计算出的几何失真结果。从表 1 可以明显地看出,对于相同的水印强度系数,在小波系数的法向分量嵌入水印时所引起的几何失真比切向分量要大,这从定量上验证了图 4 中的实验结果。

表 1 Bunny 嵌入水印后引起的几何失真
Tab.1 Geometry error for Bunny meshes after watermarks embedded

α_t	α_n	几何失真
0.05	0	0.000 470
0.1	0	0.000 933
0.2	0	0.001 712
0	0.05	0.000 859
0	0.1	0.001 716
0	0.2	0.003 425
0.2	0.2	0.003 901

4.2 攻击实验

在 Bunny 网格上(118 206 个顶点, 235 520 个三角形面)进行攻击实验。嵌入水印时的参数为

$\alpha_t = 0.05, \alpha_n = 0, n = 5, \alpha_s = 0.1$ 。实验中,以提取出的水印信号和原始水印信号的相关值作为水印算法鲁棒性的度量。

(1) 仿射变换

仿射变换包括平移、旋转、缩放或它们的组合变换。它们不改变网格的拓扑结构。从实验结果表明,对嵌入水印的网格进行仿射变换后,水印信号可以完全提取出来(提取的水印与原始水印的相关值为 1)。

(2) 随机噪声

图 6 是对嵌入水印后的 Bunny 网格加入随机噪声后的效果,噪声的强度为 5×10^{-4} 。随着网格中加入噪声顶点个数的增加,相关值衰减很慢,当顶点数 N 增加到一定程度时($N > 10\ 000$),噪声对水印信号的影响几乎不再增加。

图 7 是在加入噪声的顶点率不变的情况下,对嵌入水印后的 Bunny 网格加入不同强度噪声的效果。随着噪声强度的增加,相关值衰减很快,当噪声强度大到一定值之后,相关值小于设定的阈值,已经不能提取水印信号了。可以看出,影响水印鲁棒性的主要因素是噪声的强度。

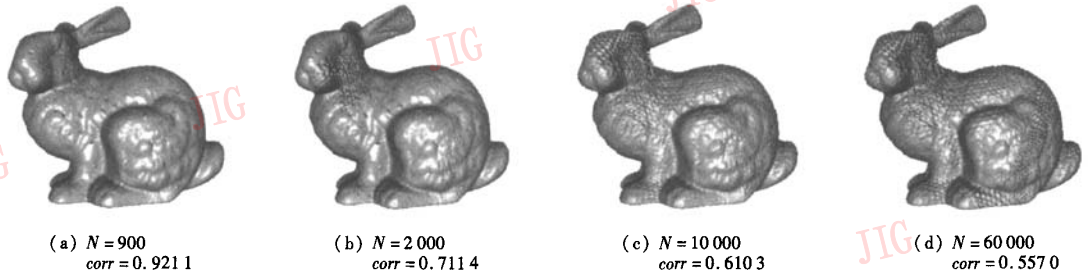


图 6 噪声强度一定,对 Bunny 网格水印的随机噪声攻击

Fig. 6 Experiments of random noise attacks on Bunny meshes with the strength of noise fixed

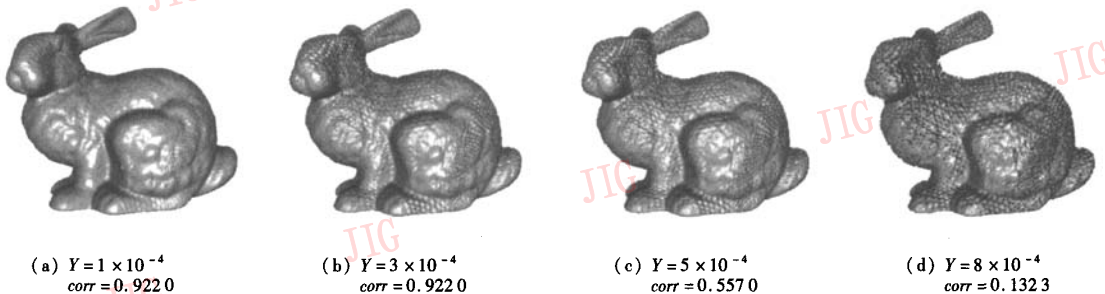


图 7 加入噪声的顶点率一定,对 Bunny 网格水印的随机噪声攻击

Fig. 7 Experiments of random noise attacks on Bunny meshes with the rate of vertices fixed

(3) 低通滤波

对网格进行低通滤波时,将较高分辨率的小波系数全部设为零,即去除较高分辨率的细节信息。由于水印嵌入在低分辨率的小波系数中,对高分辨率细节信息的修改不会影响低分辨率的小波系数,所以水印算法对低通滤波是鲁棒的。图 8 是对 Bunny 网格进行多分辨率滤波的效果,虽然滤波后的网格越来越不光滑,但提取的水印信号与原始水印信号的相关值仍然为 1。

(4) 多分辨率增强

多分辨率增强“放大”或“缩小”网格中某个分辨率级的细节信息。和多分辨率滤波类似,对其他分辨率的增强不影响嵌入在最低分辨率的细节信息里的水印信号。图 9 是对 Bunny 水印网格进行多分辨率增强的显示效果。但当对最低分辨率的细节信息进行增强时,会出现不能检测水印信号的情况(图 9(d)),但这时的攻击已经使网格的失真很大了,失去了意义。

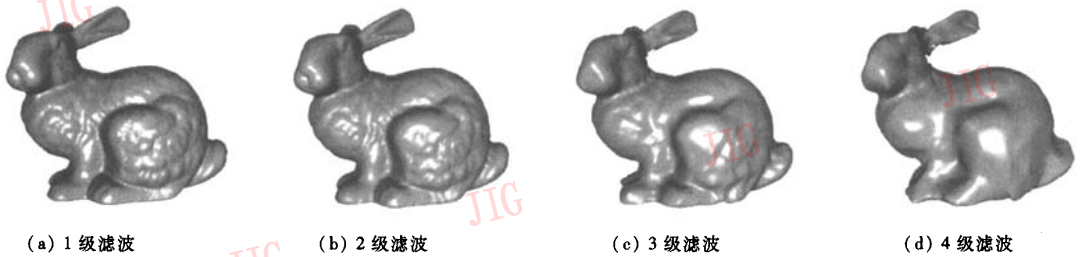


图 8 对 Bunny 网格水印的多分辨率滤波攻击

Fig. 8 Experiments of multiresolution filters attacks on Bunny meshes

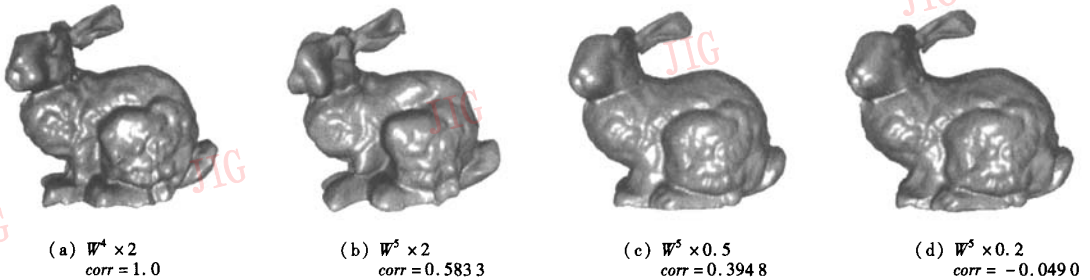


图 9 对 Bunny 网格水印的多分辨率增强攻击

Fig. 9 Experiments of multiresolution enhancement attacks on Bunny meshes

5 结 论

目前有关 3 维几何数据的数字水印的研究还较少。它的难点在于网格数据是不规则采样、具有几何和拓扑性质的数据集,缺乏进行频谱分解的自然的方法;网格水印的另一难点是目前还缺乏 3 维几何变化的感知模型。本文基于提升小波变换,对具有细分连接性的半规则网格,选择较低分辨率的小波系数嵌入水印,既满足了不可见性,又具有较强的鲁棒性。通过对小波系数的实验统计分析,并用 Metro 工具定量地度量几何失真,对小波系数的切线

分量和法向分量设计了不同的嵌入强度,降低了水印嵌入所引起的几何失真。这些实验结果为今后网格水印的设计提供了参考。

参考文献 (References)

- 1 Ohbuchi R, Masuda H, Aono M. Watermarking three-dimensional polygonal models[A]. In: Proceedings of the ACM Multimedia '97 [C], Seattle, Washington, USA, 1997; 261 ~ 272.
- 2 Benedens O. GEOMARK—Watermarking technology for 3D models and virtual scenes[J]. Computer Graphic Topics, 2001, 13(1): 20 ~ 21.
- 3 Yu Z Q, Horace H S, Kwok L F. A robust watermarking scheme for 3D triangular mesh models [J]. Pattern Recognition, 2003, 36(11): 2603 ~ 2614.

- 4 Kanai S, Date H, Kishinami T. Digital watermarking for 3D polygons using multiresolution wavelet decomposition[A]. In: Proceedings of the Sixth IFIP WG 5.2 International Workshop on Geometric Modeling: Fundamentals and Applications (GEO-6) [C], Tokyo, Japan, 1998; 296 ~ 307.
- 5 Lounsbery M. Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Types [D]. Washington DC, USA: Department of Computer Science and Engineering, University of Washington, 1994.
- 6 Praun E, Hoppe H, Finkelstein A. Robust Mesh Watermarking[A]. In: Proceedings of SIGGRAPH'99[C], Los Angeles, USA, 1999; 69 ~ 76.
- 7 Hoppe H. Progressive meshes[A]. In: Proceedings of SIGGRAPH'96[C], New Orleans, USA, 1996; 99 ~ 108.
- 8 Kangkang Y, Zhigeng P, Jiaoying S, *et al.* Robust mesh watermarking based on multiresolution processing[J]. Computers & Graphics, 2001, 25(3): 409 ~ 420.
- 9 Guskov I, Sweldens W, Schroder P. Multiresolution signal processing for meshes [A]. In: Proceedings of SIGGRAPH'99 [C], Los Angeles, USA, 1999; 325 ~ 334.
- 10 Ohbuchi R, Takahashi S, Miyazawa T, *et al.* Watermarking 3D polygonal meshes in the mesh spectral domain[A]. In: Proceedings of the Graphics Interface 2001 [C], Ottawa, Ontario, Canada, 2001; 9 ~ 17.
- 11 Karni Z, Gotsman C. Spectral compression of mesh geometry[A]. In: Proceedings of SIGGRAPH 2000[C], New Orleans, Louisiana, USA, 2000; 279 ~ 286.
- 12 Sweldens W. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1998, 29(2): 511 ~ 546.
- 13 Loop C. Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles[D]. Utah, USA: University of Utah, 1987.
- 14 Zorin D, Schroder P, Sweldens W. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology[A]. In: Proceedings of SIGGRAPH'96[C], New Orleans, Louisiana, USA, 1996; 189 ~ 192.
- 15 Description of the ASCII Data file format [EB/OL]. <http://www.multires.caltech.edu/software/pgc/datfile.pdf>.
- 16 Cignoni P, Rocchini C, Scopigno R. Metro: Measuring error on simplified surfaces[J]. Computer Graphics Forum, 1998, 17(2): 167 ~ 174.